

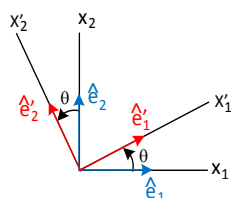


دانشگاه گیلان

دانشکده مهندسی مکانیک	مکانیک محیط پیوسته ۱	دکتر مهدی قنّاد
-----------------------	----------------------	-----------------

۱-۵: تبدیل تانسورها Transformation of Tensors

اگر دستگاه کارتزین x_i به دستگاه کارتزین x'_i تبدیل شود، بردارهای یگه دو دستگاه دارای طول واحد و زوایای 90° درجه خواهند بود. بنابراین تانسور تبدیل بین دو دستگاه، تانسور متعامد است.



$$\begin{cases} \hat{e}'_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_2 = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2 \end{cases}$$

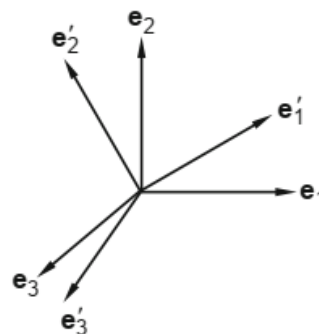
$$\begin{Bmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x'_1, x_1) & \cos(x'_1, x_2) \\ \cos(x'_2, x_1) & \cos(x'_2, x_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\hat{e}'_i = \cos(x'_i, x_j) \hat{e}_j \Leftrightarrow \hat{e}_i = \cos(x_i, x'_j) \hat{e}'_j$$

$$\theta_{ij} = \angle(x_i, x'_j)$$

	x'_1	x'_2	x'_3
x_1	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}
x_2	Q_{21}	Q_{22}	Q_{23}
x_3	Q_{31}	Q_{32}	Q_{33}

$$\tilde{Q} = [Q_{ij}] = [\cos \theta_{ij}] = [\cos(x_i, x'_j)]$$



تانسور تبدیل بین دو دستگاه (\tilde{Q})، متعامد است.

$$\begin{cases} \hat{e}'_i = \tilde{L} \hat{e}_i = L_{ji} \hat{e}_j \\ L_{ji} = \hat{e}_j \cdot \tilde{L} \hat{e}_i = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i = \cos(x'_i, x_j) = Q_{ji} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{e}_i = \tilde{L} \hat{e}'_i = L_{ji} \hat{e}'_j \\ L_{ji} = \hat{e}'_j \cdot \tilde{L} \hat{e}'_i = \hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i = \cos(x_i, x'_j) = Q_{ij} \end{cases}$$

$$\hat{e}'_i = Q_{ji} \hat{e}_j \Leftrightarrow \hat{e}_i = Q_{ij} \hat{e}'_j$$

First-order tensor

vector $\vec{a} = a_i \hat{e}_i = a'_i \hat{e}'_i$



دکتر مهدی قنّاد	مکانیک محیط پیوسته ۱	دانشکده مهندسی مکانیک

$$a_i = \hat{e}_i \cdot \vec{a} = \hat{e}_i \cdot a'_m \hat{e}'_m = a'_m (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_m) = Q_{im} a'_m$$

$$\text{or } a_i = \hat{e}_i \cdot \vec{a} = Q_{im} \hat{e}'_m \cdot \vec{a} = Q_{im} a'_m$$

$$a'_i = \hat{e}'_i \cdot \vec{a} = Q_{mi} \hat{e}_m \cdot \vec{a} = Q_{mi} a_m$$

$$a'_i = Q_{mi} a_m \text{ or } \{a'\} = [Q]^T \{a\}$$

$$a_i = Q_{im} a'_m \text{ or } \{a\} = [Q] \{a'\}$$

Second-order tensor

$$\text{tensor } \tilde{T} = T_{ij} \hat{e}_i \circ \hat{e}_j = T'_{ij} \hat{e}'_i \circ \hat{e}'_j$$

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_j = \hat{e}_i \cdot (T'_{mn} \hat{e}'_m \circ \hat{e}'_n) \hat{e}_j = T'_{mn} \hat{e}_i \cdot (\hat{e}'_m \circ \hat{e}'_n) \hat{e}_j = T'_{mn} \hat{e}_i \cdot \hat{e}'_m (\hat{e}'_n \cdot \hat{e}_j) = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn}$$

$$\text{or } T_{ij} = \hat{e}_i \cdot \tilde{T} \hat{e}_j = Q_{im} \hat{e}'_m \cdot \tilde{T} (Q_{jn} \hat{e}'_n) = Q_{im} Q_{jn} (\hat{e}'_m \cdot \tilde{T} \hat{e}'_n) = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn}$$

$$T'_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \tilde{T} \hat{e}'_j = Q_{mi} \hat{e}_m \cdot \tilde{T} (Q_{nj} \hat{e}_n) = Q_{mi} Q_{nj} (\hat{e}_m \cdot \tilde{T} \hat{e}_n) = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$$

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \text{ or } [T'] = [Q]^T [T] [Q]$$

$$T_{ij} = Q_{im} Q_{jn} T'_{mn} \text{ or } [T] = [Q] [T'] [Q]^T$$

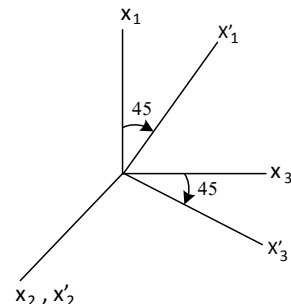
مثال: اگر محورهای جدید با چرخش 45° ساعت گرد محورهای قدیم حول محور x_2 به وجود آیند، بردار $\vec{V} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3$

را در دستگاه جدید بیان نمایید.

حل:

$$\tilde{Q} = [Q_{ij}] = [\cos(x_i, x'_j)] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = v_i \hat{e}_i = v'_i \hat{e}'_i$$





دانشکده مهندسی مکانیک	مکانیک محیط پیوسته ۱	دکتر مهدی قنّاد
-----------------------	----------------------	-----------------

$$v'_i = Q_{ji} v_j \text{ or } \{V'\} = [Q]^T \{V\} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}' = \sqrt{2}\hat{e}'_1 + \hat{e}'_3 \Rightarrow |\vec{V}| = |\vec{V}'| = \sqrt{3}$$

مثال: تانسور مرتبه‌ی دو T در دستگاه مختصات x_i داده شده است. مؤلفه‌های این تانسور را در دستگاه مختصات x'_i که 30° پادساعت‌گرد حول محور x_3 چرخیده است، به‌دست آورید.

$$[T]_{x_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\tilde{Q} = [\cos(x_i, x'_j)] = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \text{ or } [T'] = [Q]^T [T] [Q] = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{x'_i} = \begin{bmatrix} 5/4 & \sqrt{3}/4 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرین: نشان دهید که مجموع درایه‌های قطری یک تانسور در تبدیلات متعامد، کمیت پایای عددی است.



دانشگاه گیلان

دکتر مهدی قنّاد

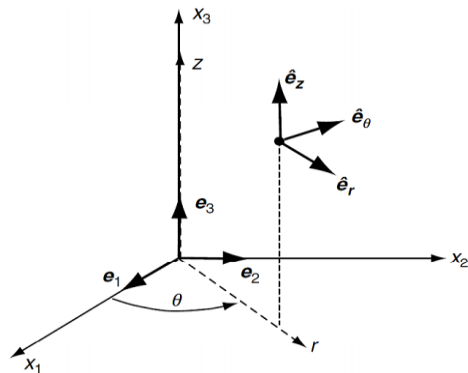
مکانیک محیط پیوسته ۱

دانشکده مهندسی مکانیک

مثال: یگه‌بردارهای دستگاه مختصات استوانه‌ای را برحسب یگه‌بردارهای دستگاه کارتزین بنویسید.

$$\hat{e}'_i = Q_{ji} \hat{e}_j = \cos(x'_i, x_j) \hat{e}_j$$

$$\hat{e}_{r\theta z} = [Q]^T \hat{e}_{xyz} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{e}_r = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}_z = \hat{e}_3 \end{cases}$$